



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**  
**«Исследование системы атомов с  $\Lambda$ -спектром**  
**в рамках модели Тависа-Каммингса»**

Выполнил студент  
Группы 610  
Мяо Хуэйхуэй

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор  
Ю. И. Ожигов

Москва, 2021

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Постановка задачи</b>	<b>4</b>
<b>2 Оптическая интерпретация движения свободной частицы</b>	<b>5</b>
<b>3 Модель Тависа-Каммингса</b>	<b>6</b>
3.1 Система атомов с $\Lambda$ -спектром . . . . .	8
3.1.1 Структура атома . . . . .	8
3.1.2 Транспортный уровень . . . . .	9
3.1.3 Базисные состояния . . . . .	10
3.1.4 Тёмные состояния . . . . .	10
3.2 Математическое моделирование . . . . .	12
3.2.1 Разделение гильбертова пространства . . . . .	12
3.2.2 Метод Эйлера и квантовое основное уравнение . . . . .	12
3.2.3 Описание алгоритма . . . . .	12
3.3 Результаты . . . . .	13
3.3.1 Система одного атома . . . . .	13
3.3.2 Система двух атомов . . . . .	18
<b>4 Ансамблевые осцилляции</b>	<b>25</b>
4.1 Ансамбль атомов . . . . .	25
4.2 Результаты . . . . .	25
<b>Заключение</b>	<b>26</b>
<b>Список литературы</b>	<b>27</b>



## Введение

Конечномерная модель квантовой электродинамики Джейнса-Каммингса-Хаббарда описывает взаимодействие фотонов, переходящих между полосами, с одномодовым полем частоты, близко к собственной частоте полостей.

Конечномерная модель квантовой электродинамики Тависа-Каммингса описывает взаимодействие атомов с  $\Lambda$ -спектром, с многомодовым полем частоты.

Для слабой связи атомов с полем справедливо приближение RWA (вращающейся волны), которое позволяет либо решить задачу аналитически (в случае одного атома) или существенно упростить компьютерное моделирование квантовой динамики - для случая нескольких атомов.

В работе мы исследуем унитарную эволюцию системы с утечкой фотонов и найдём возможные тёмные состояния - это состояние стабильное, не испускающее фотон.

## 1 Постановка задачи

В настоящей работе рассматриваются две части: оптическая интерпретация движения свободной частицы в рамках Джейнса-Каммингса-Хаббарда и динамика сложных квантовых состояний системы атомов с  $\Lambda$ -спектром и многомодового поля в резонаторе в рамках модели Тависа-Каммингса в RWA приближении.

Предметом исследования являются:

- Изучение формулировки квантовой теории через интегралы по траекториям и реализация оптической интерпретации движения свободной частицы в рамках Джейнса-Каммингса-Хаббарда;
- Изучение структуры и характера системы атомов с  $\Lambda$ -спектром;
- Математическое моделирование сложных квантовых системы;
- Исследование унитарной эволюции системы одного атома в рамках модели Тависа-Каммингса и анализ стабильных состояний и синглетов;
- Исследование унитарной эволюции системы двух атомов в рамках модели Тависа-Каммингса, анализ стабильных состояний и синглетов, изучение влияния транспортного уровня на пространство тёмных состояний.

## 2 Оптическая интерпретация движения свободной частицы

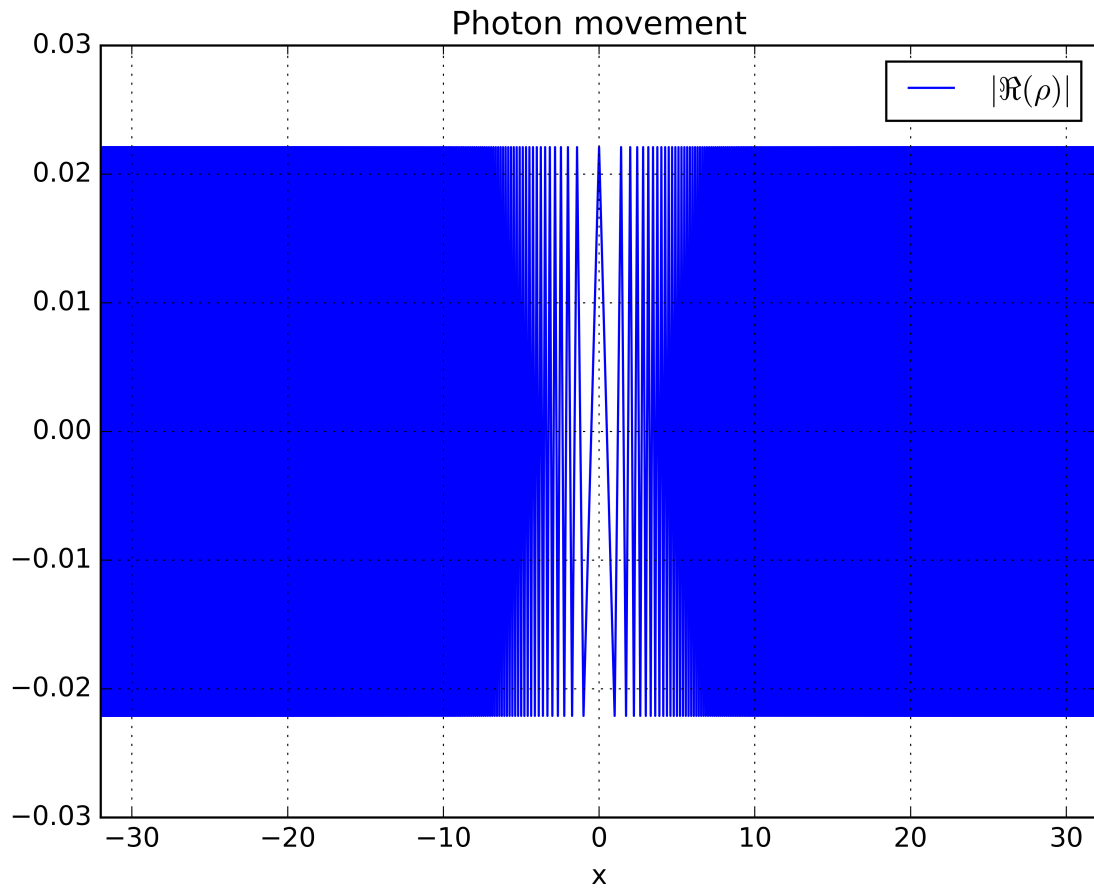


Figure 1: Оптическая интерпретация движения свободной частицы

### 3 Модель Тависа-Каммингса

Рассмотрим  $N$  атомов с  $\Lambda$ -спектром, взаимодействующих с многомодным электромагнитным полем в резонаторе.

Атомы испускают или поглощают фотон, когда взаимодействуют с электромагнитным полем. При поглощении фотона атом переходит в возбужденное состояние, при испускании - переходит в основное состояние.

Для каждого электрона, считаем разные спины: спин вверх и спин вниз. Электроны испускают или поглощают фотон. При поглощении фотона электрон переходит во спин вверх, при испускании - переходит во спин вниз.

Введем также следующие операторы:

$a_i^+$ ,  $a_i$  - операторы рождения и уничтожения  $i$ -го типа фотонов резонаторной моды,

$a_{spin}^+$ ,  $a_{spin}$  - операторы рождения и уничтожения фотонов для перехода между спинами электрона,

$\sigma_{i,j}^+$ ,  $\sigma_{i,j}$  - повышающий и понижающий операторы  $j$ -го атома для  $i$ -го типа фотонов,

$\sigma_{spin,j,k}^+$ ,  $\sigma_{spin,j,k}$  - повышающий и понижающий операторы электрона на  $k$ -ой орбите  $j$ -го атома.

В представлении взаимодействия такая система описывается гамильтонианом Тависа-Каммингса:

$$\begin{aligned}
 H_{TC} = H_{field} + H_{atoms} + H_{int} = & \hbar \sum_i \omega_{i,c} a_i^+ a_i + \hbar \omega_{spin,c} a_{spin}^+ a_{spin} \\
 & + \hbar \sum_j \left\{ \sum_i \omega_{i,a} \sigma_{i,j}^+ \sigma_{i,j} + \hbar \omega_{spin,a} \sum_k \sigma_{spin,j,k}^+ \sigma_{spin,j,k} \right\} \\
 & + \sum_j \left\{ \sum_i g_{i,j} (\sigma_{i,j}^+ + \sigma_{i,j}) (a_i^+ + a_i) + \sum_k g_{j,k} (\sigma_{spin,j,k}^+ + \sigma_{spin,j,k}) (a_{spin}^+ + a_{spin}) \right\}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$\hbar$  - постоянная Дирака;

$\omega_{i,c}$ ,  $\omega_{spin,c}$  - частота фотонов в полости;

$\omega_{i,a}$ ,  $\omega_{spin,a}$  - частота атомного перехода;

$g_{i,j}$ ,  $g_{j,k}$  - константа взаимодействия атома с полем;

$|\omega_{i,c} - \omega_{i,a}| \ll \omega_{i,c} + \omega_{i,a}$  и  $|\omega_{spin,c} - \omega_{spin,a}| \ll \omega_{spin,c} + \omega_{spin,a}$  (условие применимости модели ТС).

Пренебрегая членами  $\sigma^+ a^+$  и  $\sigma a$ , не сохраняющими энергию, перепишем гамильтониан в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 H_{TC} \approx H_{TC}^{RWA} = & \hbar \sum_i \omega_{i,c} a_i^+ a_i + \hbar \omega_{spin,c} a_{spin}^+ a_{spin} \\
 & + \hbar \sum_j \left\{ \sum_i \omega_{i,a} \sigma_{i,j}^+ \sigma_{i,j} + \hbar \omega_{spin,a} \sum_k \sigma_{spin,j,k}^+ \sigma_{spin,j,k} \right\} \\
 & + \sum_j \left\{ \sum_i g_{i,j} (\sigma_{i,j} a_i^+ + \sigma_{i,j}^+ a_i) + \sum_k g_{j,k} (\sigma_{spin,j,k} a_{spin}^+ + \sigma_{spin,j,k}^+ a_{spin}) \right\}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Приближение (2) называется приближением вращающейся волны (rotating wave approximation), или RWA, и имеет место при условии:

$$\begin{aligned}
 \frac{g_{i,j}}{\hbar \omega_{i,c}} & \approx \frac{g_{i,j}}{\hbar \omega_{i,a}} \ll 1, \forall i, j \\
 \frac{g_{j,k}}{\hbar \omega_{spin,c}} & \approx \frac{g_{j,k}}{\hbar \omega_{spin,a}} \ll 1, \forall j, k
 \end{aligned} \tag{3}$$



### 3.1 Система атомов с $\Lambda$ -спектром

#### 3.1.1 Структура атома

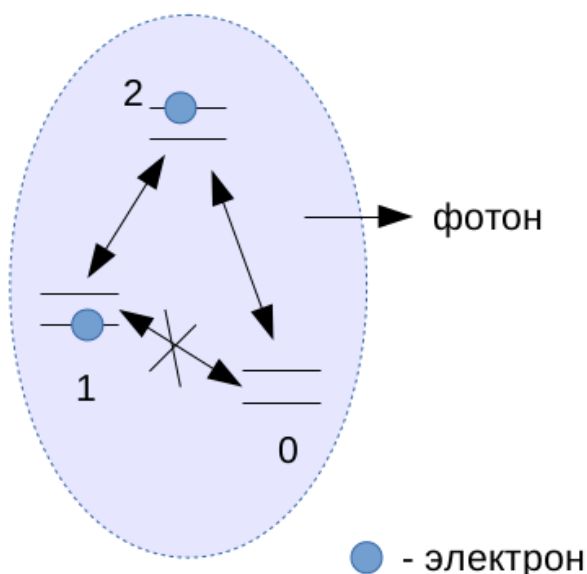


Figure 2: Структура атома с  $\Lambda$ -спектром

У каждого атома с  $\Lambda$ -спектром есть три орбиты: орбита 0, орбита 1 и орбита 2. У каждой орбиты есть два типа мест для электрона со спином вверх и электрона со спином вниз. Из-за принципа запрета Паули два электрона с одинаковым спином на одной и той же орбите нельзя. Поэтому у нас только четыре случая на одной орбите: нет электрона, один электрон со спином вверх, один электрон со спином вниз и два электрона (один со спином вверх, другой со спином вниз). Атом взаимодействует с электромагнитным полем полости, испуская или поглощая фотон. Электроны могут либо переходить с орбиты 0 на орбиту 2 и обратно (испускать или поглощать фотон с частотой  $\Omega \uparrow$  для электрона со спином вверх, с частотой  $\Omega \downarrow$  для электрона со спином вниз), либо переходить с орбиты 1 на орбиту 2 и обратно (испускать или поглощать фотон с частотой  $\omega \uparrow$  для электрона со спином вверх, с частотой  $\omega \downarrow$  для электрона со спином вниз). Переход между орбитами 0 и 1 нельзя. Электроны также могут переходить с спина вверх на спин вниз и обратно (испускать или поглощать фотон с частотой  $\omega_{spin}$ ). Поэтому у нас есть пять типов фотонов: фотоны с частотой  $\Omega \uparrow$ , частотой  $\Omega \downarrow$ , частотой  $\omega \uparrow$ , частотой

$\omega \downarrow$  и частотой  $\omega_{spin}$ .

### 3.1.2 Транспортный уровень

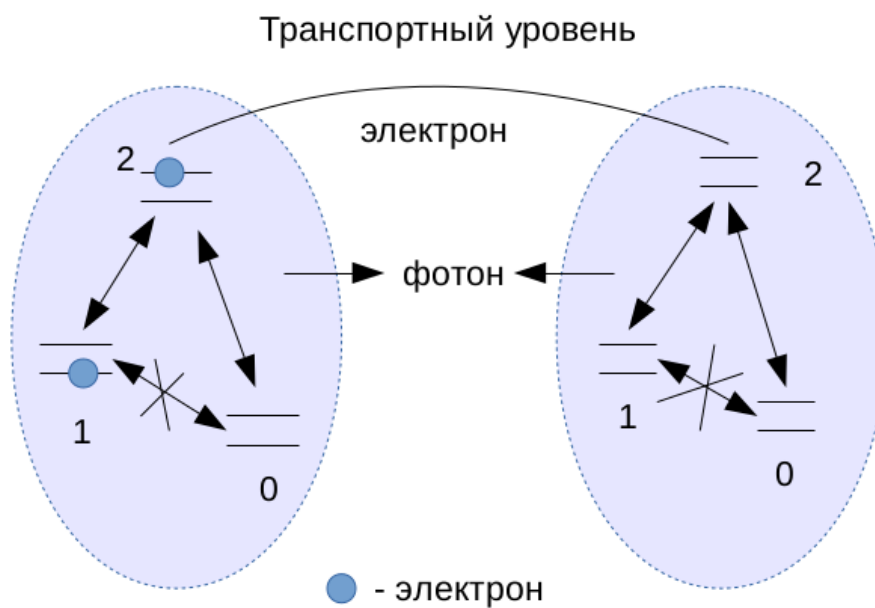


Figure 3: Структура системы атомов с транспортным уровнем

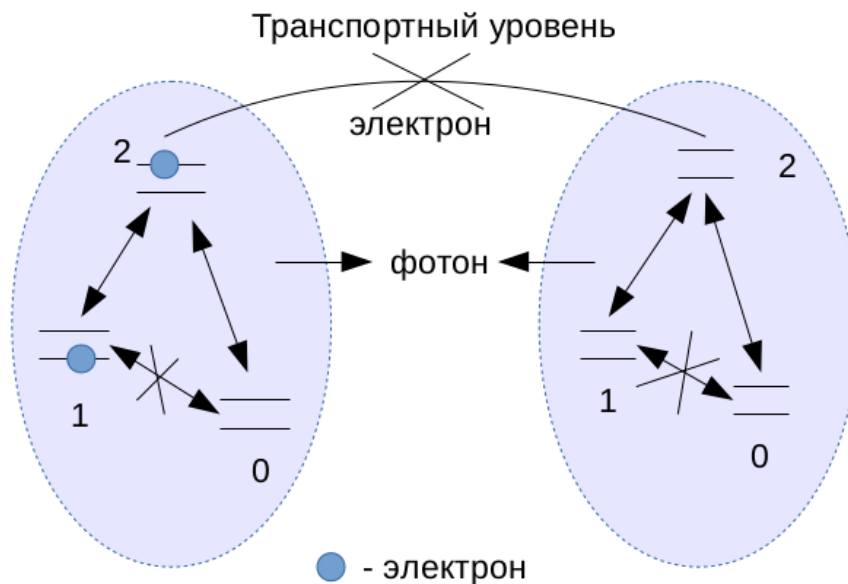


Figure 4: Структура системы атомов без транспортного уровня

Если у нас есть система многих атомов с одинаковым  $\Lambda$ -спектром, то существует две структуры: структура системы атомов с транспортным уровнем

и другая - без транспортного уровня. Транспортный уровень только для перехода электрона между двумя атомами. На рисунках 3 и 4 описываем самые простые системы - системы двух атомов.

### 3.1.3 Базисные состояния

Для системы атомов с  $\Lambda$ -спектром, гильбертово пространство состав из разных подпространств. Существуют базисные состояния, которые ортогональные, соответствуют каждое подпространству. На самом деле, существуют базисные состояния фотонов и базисные состояния атомов. Получим полные базисные состояния, используя тензорное произведение всех базисных состояний каждого подпространства. Определим форму базисных состояний системы:

$$|n_{\Omega\uparrow}, n_{\Omega\downarrow}, n_{\omega\uparrow}, n_{\omega\downarrow}, n_{\omega_{spin}} >_{ph} \otimes (\otimes_{i=1}^n |n_{or_0}, n_{or_1}, n_{or_2} >_{at_i}) \quad (4)$$

где  $ph$  - фотон,  $at_i$  -  $i$ -ый атом.  $n_{or_j}, j = 0, 1, 2$  - количество электронов на  $j$ -ом орбите:  $n_{or_i} = 0$  - нет электрона,  $n_{or_i} = 1$  - один электрон со спином вверх,  $n_{or_i} = -1$  - один электрон со спином вниз,  $n_{or_i} = 2$  - два электрона (один со спином вверх и другой со спином вниз, согласно принципу запрета Паули).  $n_{\Omega\uparrow}$  - число фотонов с частотой  $\Omega \uparrow$ ,  $n_{\Omega\downarrow}$  - число фотонов с частотой  $\Omega \downarrow$ ,  $n_{\omega\uparrow}$  - число фотонов с частотой  $\omega \uparrow$ ,  $n_{\omega\downarrow}$  - число фотонов с частотой  $\omega \downarrow$ ,  $n_{\omega_{spin}}$  - число фотонов с частотой  $\omega_{spin}$ . Особенно, определим  $|vac > = |0, 0, 0, 0, 0. >_{ph}$ .

### 3.1.4 Тёмные состояния

Знаем, что атом взаимодействует возможно с электромагнитным полем полости, испуская или поглощая фотон. Существуют стабильные состояния, которые называем тёмные состояния (dark states), невозможно испускать фотон. Часто используем понятие "синглет (singlet)", чтобы получить вспомогательно тёмные состояния системы. На простейшем примере для системы двух двухуровневых атомов:

$$a^+ \sigma |S > = \frac{1}{\sqrt{2}} |0 >_{ph} (|01 > - |10 >)_{at} = \frac{1}{\sqrt{2}} |1 >_{ph} (|00 > - |11 >)_{at} = 0 \quad (5)$$

где  $|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_{ph} (|01\rangle - |10\rangle)_{at}$  - синглет.

Шум из окружения не может воздействовать на темные состояния. Поэтому, важно и значительно, что найти все возможные состояния, применяемые как носитель информации.

## 3.2 Математическое моделирование

### 3.2.1 Разделение гильбертова пространства

### 3.2.2 Метод Эйлера и квантовое основное уравнение

Общая форма квантового основного уравнения:

$$i\hbar\dot{\rho} = (H\rho - \rho H) + i \sum_j \gamma_j (A_j \rho A_j^\dagger - \frac{1}{2}(A_j^\dagger A_j \rho + \rho A_j^\dagger A_j)) \quad (6)$$

### 3.2.3 Описание алгоритма

### 3.3 Результаты

Исследуем систему одного атома и двух атомов в рамках модели Тависа-Каммингса в RWA приближении для неидеальной полости.

#### 3.3.1 Система одного атома

Для системы одного атома, пусть пять типов фотонов, существуют разные стоки соответствующие каждому типу фотонов. На рисунке 5 описываем структуру систему одного атома с  $\Lambda$ -спектром.

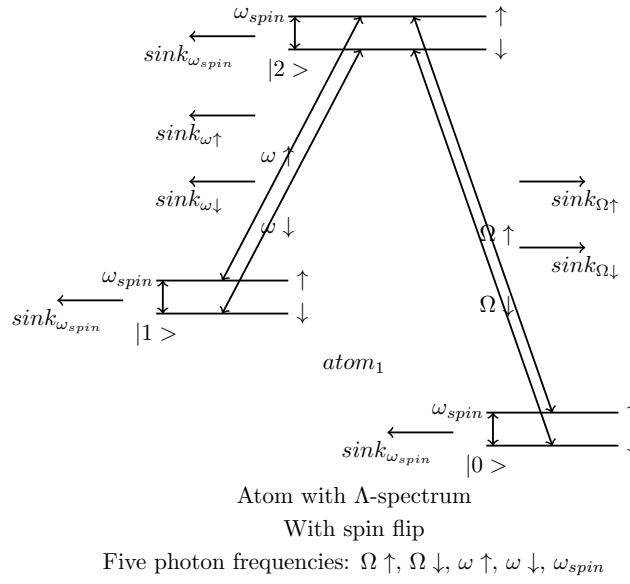


Figure 5: Система одного атомов с  $\Lambda$ -спектром

Рассмотрим гамильтониан:

$$H_{TC}^{RWA} = H_{\Omega\uparrow} + H_{\Omega\downarrow} + H_{\omega\uparrow} + H_{\omega\downarrow} + H_{\omega_{spin}} + H_{int} \quad (7)$$

$$H_{\Omega\uparrow} = \hbar\Omega \uparrow (a_{\Omega\uparrow}^{\dagger}a_{\Omega\uparrow} + \sigma_{\Omega\uparrow}^{\dagger}\sigma_{\Omega\uparrow}) \quad (8)$$

$$H_{\Omega\downarrow} = \hbar\Omega \downarrow (a_{\Omega\downarrow}^{\dagger}a_{\Omega\downarrow} + \sigma_{\Omega\downarrow}^{\dagger}\sigma_{\Omega\downarrow}) \quad (9)$$

$$H_{\omega\uparrow} = \hbar\omega \uparrow (a_{\omega\uparrow}^{\dagger}a_{\omega\uparrow} + \sigma_{\omega\uparrow}^{\dagger}\sigma_{\omega\uparrow}) \quad (10)$$

$$H_{\omega\downarrow} = \hbar\omega \downarrow (a_{\omega\downarrow}^{\dagger}a_{\omega\downarrow} + \sigma_{\omega\downarrow}^{\dagger}\sigma_{\omega\downarrow}) \quad (11)$$

$$H_{\omega_{spin}} = \hbar\omega_{spin}(a_{\omega_{spin}}^{\dagger}a_{\omega_{spin}} + \sigma_{\omega_{spin},or_0}^{\dagger}\sigma_{\omega_{spin},or_0} + \sigma_{\omega_{spin},or_1}^{\dagger}\sigma_{\omega_{spin},or_1} + \sigma_{\omega_{spin},or_2}^{\dagger}\sigma_{\omega_{spin},or_2}) \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
H_{int} = & g_{\Omega\uparrow}(a_{\Omega\uparrow}\sigma_{\Omega\uparrow}^+ + a_{\Omega\uparrow}^+\sigma_{\Omega\uparrow}) + g_{\Omega\downarrow}(a_{\Omega\downarrow}\sigma_{\Omega\downarrow}^+ + a_{\Omega\downarrow}^+\sigma_{\Omega\downarrow}) + \\
& g_{\omega\uparrow}(a_{\omega\uparrow}\sigma_{\omega\uparrow}^+ + a_{\omega\uparrow}^+\sigma_{\omega\uparrow}) + g_{\omega\downarrow}(a_{\omega\downarrow}\sigma_{\omega\downarrow}^+ + a_{\omega\downarrow}^+\sigma_{\omega\downarrow}) + \\
& g_{\omega spin}\{a_{\omega spin}(\sigma_{\omega spin,or_0}^+ + \sigma_{\omega spin,or_1}^+ + \sigma_{\omega spin,or_2}^+) + \\
& a_{\omega spin}^+(\sigma_{\omega spin,or_0} + \sigma_{\omega spin,or_1} + \sigma_{\omega spin,or_2})\}
\end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим результаты:

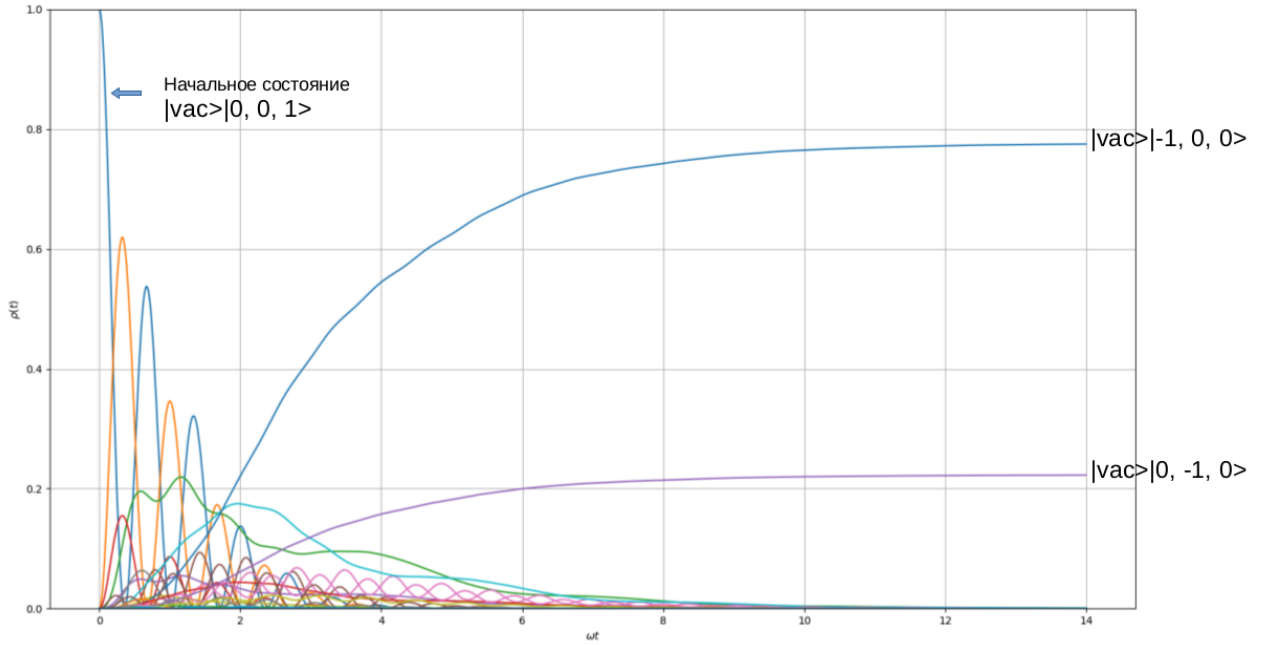


Figure 6: Система одного атома с одним электроном;  
Начальное состояние:  $|vac>|0,0,1>$ ;  
Параметры:  
 $g_{\Omega\uparrow} = 4, g_{\Omega\downarrow} = 4, g_{\omega\uparrow} = 2, g_{\omega\downarrow} = 2, g_{tun\uparrow} = 1, g_{tun\downarrow} = 1, g_{spin} = 1$ ;  
 $\gamma_{\Omega\uparrow} = 1, \gamma_{\Omega\downarrow} = 1, \gamma_{\omega\uparrow} = 1, \gamma_{\omega\downarrow} = 1, \gamma_{spin} = 1$ ;  
Стабильные состояния:  
 $|vac>|-1,0,0>$ ;  
 $|vac>|0,-1,0>$ .

Пусть начальное состояние  $|\varphi_0> = |vac>|0,0,1>$ , получим стабильные состояния:  $|\Phi_0> = |vac>|-1,0,0>$  и  $|\Phi_1> = |vac>|0,-1,0>$  (на рисунке 6).

Пусть начальное состояние  $|\varphi_0> = |vac>|0,0,2>$ , получим стабильные состояния:  $|\Phi_0> = |vac>|2,0,0>$ ,  $|\Phi_1> = |vac>|-1,-1,0>$ ,  $|\Phi_2> =$

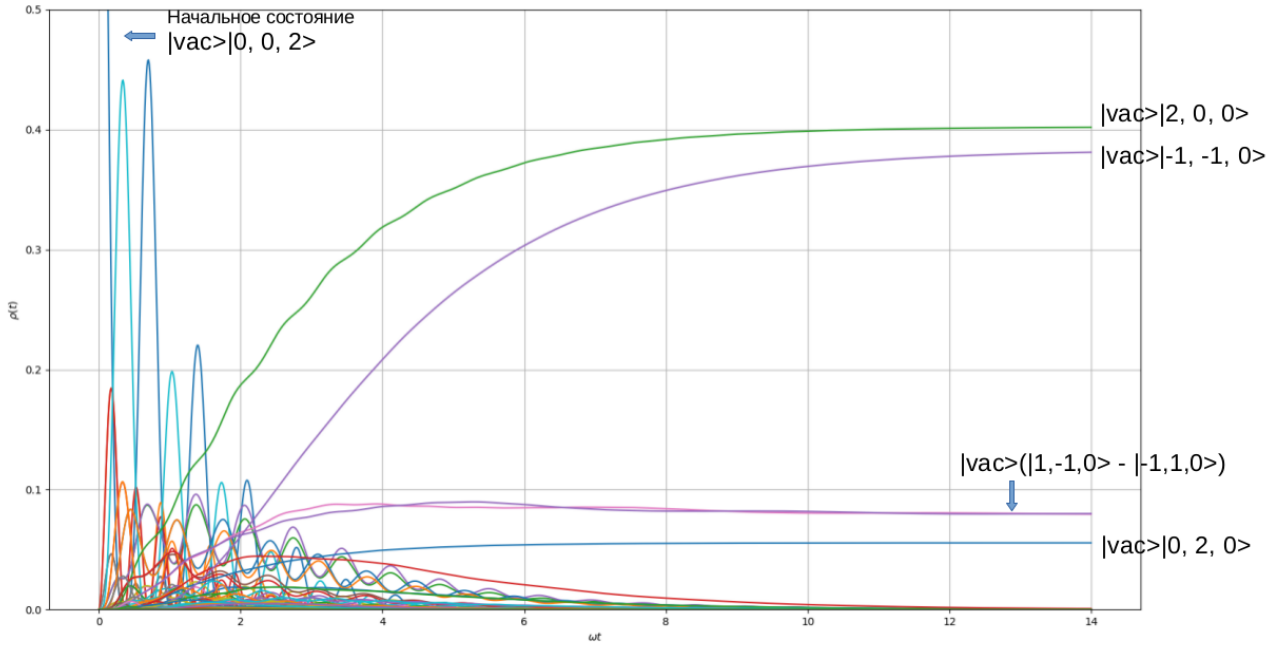


Figure 7: Система одного атома с двумя электронами;

Начальное состояние:  $|\text{vac}\rangle|0,0,2\rangle$ ;

Параметры:

$$g_{\Omega\uparrow} = 4, g_{\Omega\downarrow} = 4, g_{\omega\uparrow} = 2, g_{\omega\downarrow} = 2, g_{\text{tun}\uparrow} = 1, g_{\text{tun}\downarrow} = 1, g_{\text{spin}} = 1;$$

$$\gamma_{\Omega\uparrow} = 1, \gamma_{\Omega\downarrow} = 1, \gamma_{\omega\uparrow} = 1, \gamma_{\omega\downarrow} = 1, \gamma_{\text{spin}} = 1;$$

Стабильные состояния:

$$|\text{vac}\rangle|2,0,0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|-1,-1,0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|0,2,0\rangle;$$

Синглеты:

$$|\text{vac}\rangle(|1,-1,0\rangle - |-1,1,0\rangle).$$



$|vac > |0, 2, 0 >$  и синглет:  $|S > = |vac > (|1, -1, 0 > - | -1, 1, 0 >)$  (на рисунке 7).

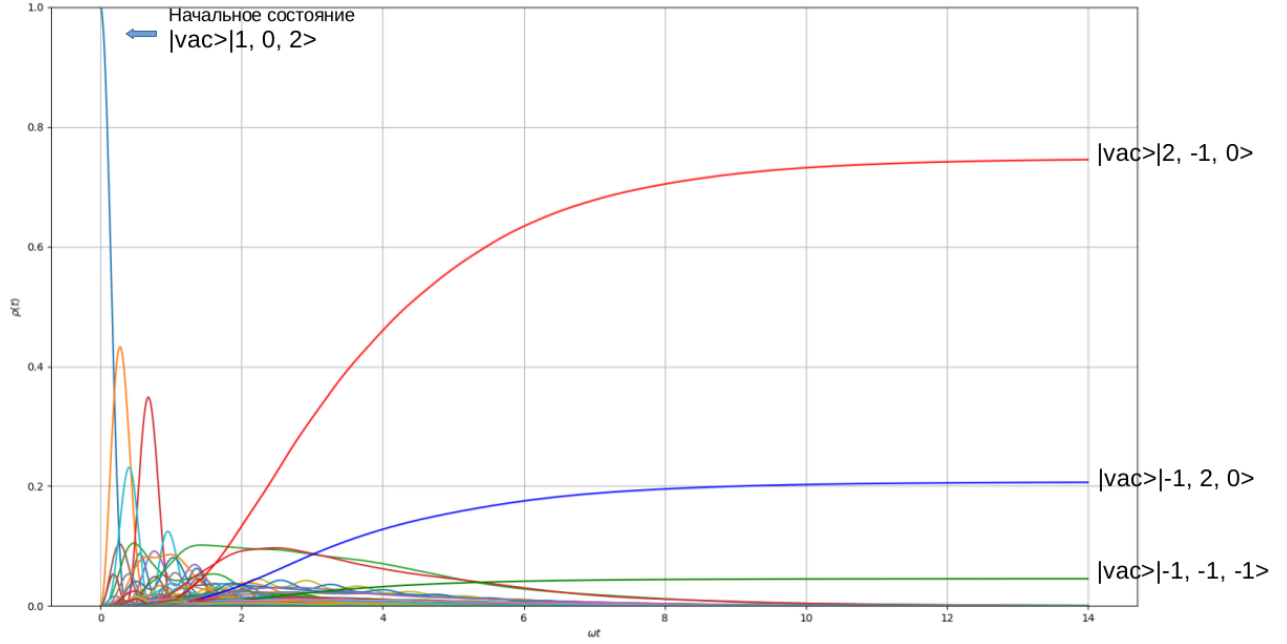


Figure 8: Система одного атома с тремя электронами;

Начальное состояние:  $|vac>|1,0,2>$ ;

Параметры:

$$g_{\Omega\uparrow} = 4, g_{\Omega\downarrow} = 4, g_{\omega\uparrow} = 2, g_{\omega\downarrow} = 2, g_{\omega\downarrow} = 2, g_{tun\uparrow} = 1, g_{tun\downarrow} = 1, g_{spin} = 1;$$

$$\gamma_{\Omega\uparrow} = 1, \gamma_{\Omega\downarrow} = 1, \gamma_{\omega\uparrow} = 1, \gamma_{\omega\downarrow} = 1, \gamma_{spin} = 1;$$

Стабильные состояния:

$$|vac>|2,-1,0>;$$

$$|vac>|-1,2,0>;$$

$$|vac>|-1,-1,-1>.$$

Пусть начальное состояние  $|\varphi_0 > = |vac > |1, 0, 2 >$ , получим стабильные состояния:  $|\Phi_0 > = |vac > |2, -1, 0 >$ ,  $|\Phi_1 > = |vac > | -1, 2, 0 >$  и  $|\Phi_2 > = |vac > | -1, -1, -1 >$  (на рисунке 8).

Пусть начальное состояние  $|\varphi_0 > = |vac > |1, 0, 2 >$ , получим стабильные состояния:  $|\Phi_0 > = |vac > |2, -1, 0 >$ ,  $|\Phi_1 > = |vac > | -1, 2, 0 >$  и  $|\Phi_2 > = |vac > | -1, -1, -1 >$  (на рисунке 9).

На рисунках 8 и 9, существуют одинаковые стабильным состояния. Но для начального состояния  $|vac > |1, 0, 2 >$ , когда время эволюции очень большое, вероятность состояния  $|vac > |2, -1, 0 >$  больше много раз чем вероятность состояния  $|vac > | -1, 2, 0 >$ . Для начального состояния  $|vac > |0, 1, 2 >$ ,

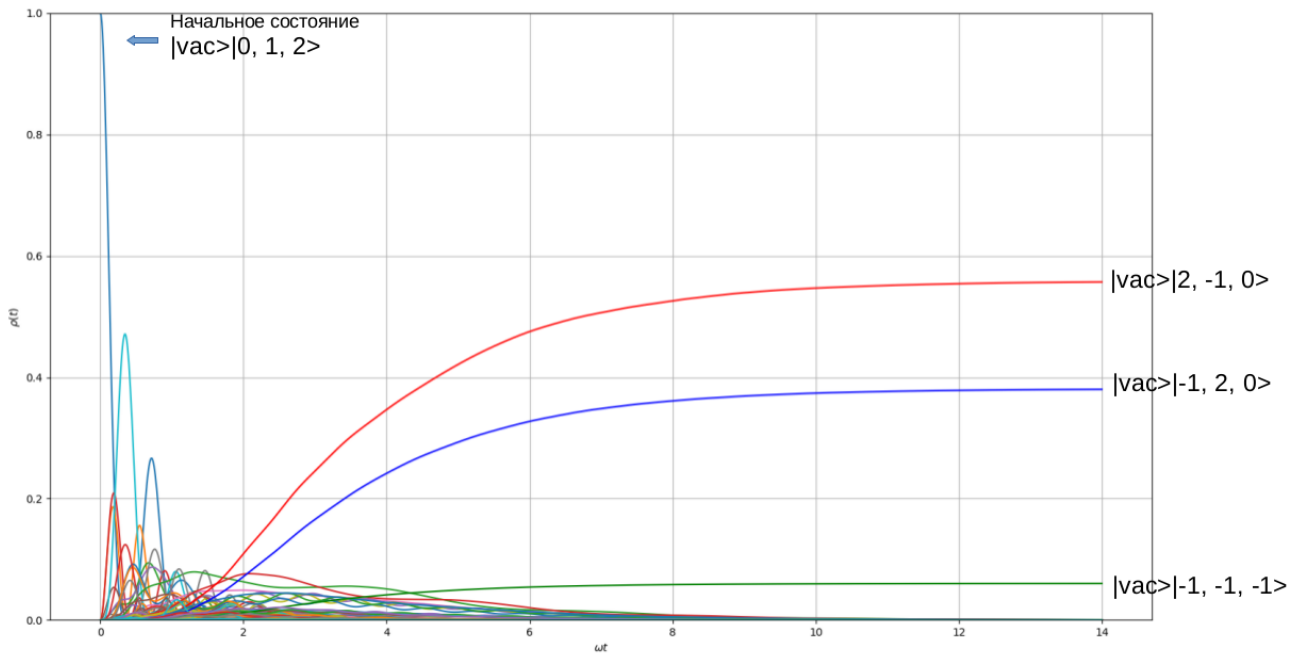


Figure 9: Система одного атома с тремя электронами;

Начальное состояние:  $|\text{vac}\rangle|0,1,2\rangle$ ;

Параметры:

$g_{\Omega\uparrow} = 4, g_{\Omega\downarrow} = 4, g_{\omega\uparrow} = 2, g_{\omega\downarrow} = 2, g_{tun\uparrow} = 1, g_{tun\downarrow} = 1, g_{spin} = 1$ ;

$\gamma_{\Omega\uparrow} = 1, \gamma_{\Omega\downarrow} = 1, \gamma_{\omega\uparrow} = 1, \gamma_{\omega\downarrow} = 1, \gamma_{spin} = 1$ ;

Стабильные состояния:

$|\text{vac}\rangle|2,-1,0\rangle$ ;

$|\text{vac}\rangle|-1,2,0\rangle$ ;

$|\text{vac}\rangle|-1,-1,-1\rangle$ .

в сравнение с начального состояния  $|vac > |2, -1, 0 >$ , вероятность  $|vac > |2, -1, 0 >$  меньше и вероятность  $|vac > |2, -1, 0 >$  больше. Но причина о том, что вероятность  $|vac > |2, -1, 0 >$  ещё больше чем вероятность  $|vac > |-1, 2, 0 >$ :  $g_{\Omega\uparrow}, g_{\Omega\downarrow} > g_{\omega\uparrow}, g_{\omega\downarrow}$ . Поэтому электроны, которые находят на орбите 2, более возможно переходят на орбиту 0 чем на орбиту 1.

### 3.3.2 Система двух атомов

Для системы двух атомов с  $\Lambda$ -спектром, аналогично, пусть пять типов фотонов, существуют разные стоки соответствующие каждому типу фотонов. Считаем два варианта: на рисунке 10 описываем структуру систему двух атомов без транспортного уровня и на рисунке 12 описываем структуру систему двух атомов с транспортным уровнем.

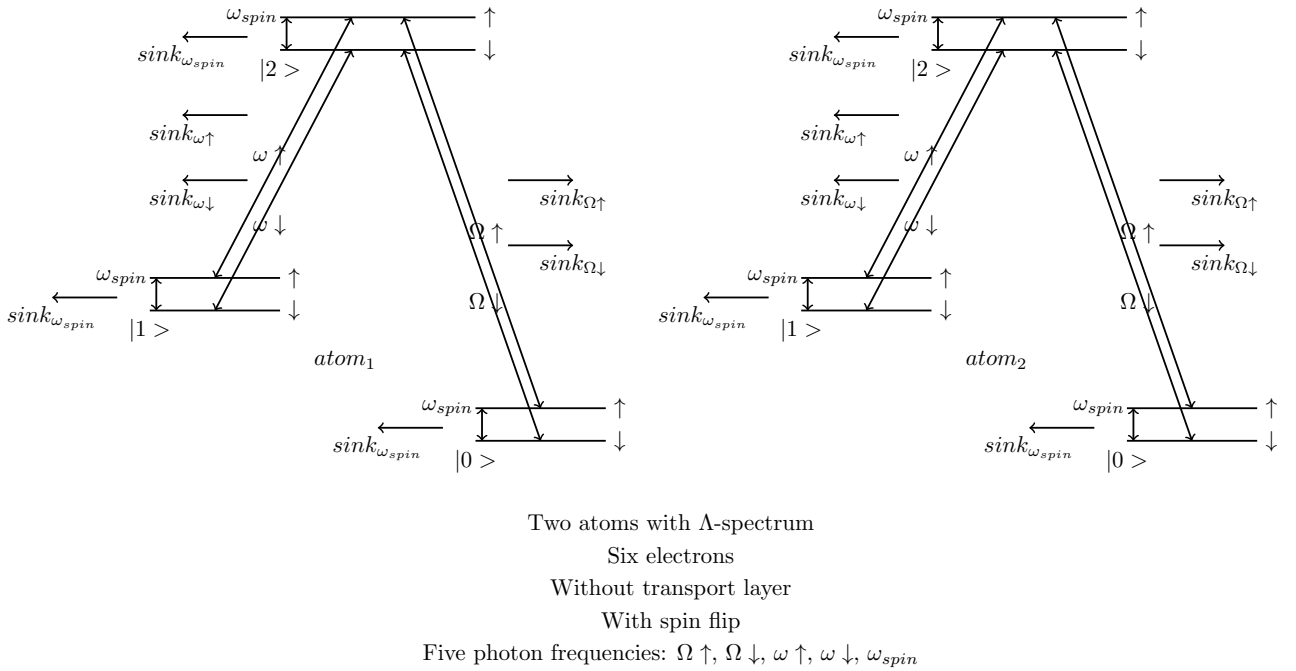


Figure 10: Система двух атомов без транспортного уровня

Рассмотрим гамильтониан первого варианта:

$$H_{TC}^{RWA} = H_{\Omega\uparrow} + H_{\Omega\downarrow} + H_{\omega\uparrow} + H_{\omega\downarrow} + H_{\omega_{spin}} + H_{int} \quad (14)$$

$$H_{\Omega\uparrow} = \hbar\Omega \uparrow (a_{\Omega\uparrow}^{\dagger} a_{\Omega\uparrow} + \sigma_{\Omega\uparrow, at_1}^{+} \sigma_{\Omega\uparrow, at_1} + \sigma_{\Omega\uparrow, at_2}^{+} \sigma_{\Omega\uparrow, at_2}) \quad (15)$$

$$H_{\Omega\downarrow} = \hbar\Omega \downarrow (a_{\Omega\downarrow}^{\dagger} a_{\Omega\downarrow} + \sigma_{\Omega\downarrow, at_1}^{+} \sigma_{\Omega\downarrow, at_1} + \sigma_{\Omega\downarrow, at_2}^{+} \sigma_{\Omega\downarrow, at_2}) \quad (16)$$

$$H_{\omega\uparrow} = \hbar\omega \uparrow (a_{\omega\uparrow}^+ a_{\omega\uparrow} + \sigma_{\omega\uparrow,at_1}^+ \sigma_{\omega\uparrow,at_1} + \sigma_{\omega\uparrow,at_2}^+ \sigma_{\omega\uparrow,at_2}) \quad (17)$$

$$H_{\omega\downarrow} = \hbar\omega \downarrow (a_{\omega\downarrow}^+ a_{\omega\downarrow} + \sigma_{\omega\downarrow,at_1}^+ \sigma_{\omega\downarrow,at_1} + \sigma_{\omega\downarrow,at_2}^+ \sigma_{\omega\downarrow,at_2}) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} H_{\omega_{spin}} = & \hbar\omega_{spin} (a_{\omega_{spin}}^+ a_{\omega_{spin}} + \\ & \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_0}^+ \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_0} + \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_1}^+ \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_1} + \\ & \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_2}^+ \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_2} + \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_0}^+ \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_0} + \\ & \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_1}^+ \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_1} + \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_2}^+ \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_2}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} H_{int} = & g_{\Omega\uparrow} (a_{\Omega\uparrow} \sigma_{\Omega\uparrow,at_1}^+ + a_{\Omega\uparrow}^+ \sigma_{\Omega\uparrow,at_1} + a_{\Omega\uparrow} \sigma_{\Omega\uparrow,at_2}^+ + a_{\Omega\uparrow}^+ \sigma_{\Omega\uparrow,at_2}) + \\ & g_{\Omega\downarrow} (a_{\Omega\downarrow} \sigma_{\Omega\downarrow,at_1}^+ + a_{\Omega\downarrow}^+ \sigma_{\Omega\downarrow,at_1} + a_{\Omega\downarrow} \sigma_{\Omega\downarrow,at_2}^+ + a_{\Omega\downarrow}^+ \sigma_{\Omega\downarrow,at_2}) + \\ & g_{\omega\uparrow} (a_{\omega\uparrow} \sigma_{\omega\uparrow,at_1}^+ + a_{\omega\uparrow}^+ \sigma_{\omega\uparrow,at_1} + a_{\omega\uparrow} \sigma_{\omega\uparrow,at_2}^+ + a_{\omega\uparrow}^+ \sigma_{\omega\uparrow,at_2}) + \\ & g_{\omega\downarrow} (a_{\omega\downarrow} \sigma_{\omega\downarrow,at_1}^+ + a_{\omega\downarrow}^+ \sigma_{\omega\downarrow,at_1} + a_{\omega\downarrow} \sigma_{\omega\downarrow,at_2}^+ + a_{\omega\downarrow}^+ \sigma_{\omega\downarrow,at_2}) + \\ & g_{\omega_{spin}} \{ a_{\omega_{spin}} (\sigma_{\omega_{spin},at_1,or_0}^+ + \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_1}^+ + \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_2}^+ + \\ & \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_0}^+ + \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_1}^+ + \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_2}^+) + \\ & a_{\omega_{spin}}^+ (\sigma_{\omega_{spin},at_1,or_0} + \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_1} + \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_2} + \\ & \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_0} + \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_1} + \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_2}) \} \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим результат:

Пусть начальное состояние  $|\varphi_0\rangle = |vac\rangle | -1, -1, 1\rangle | -1, -1, 1\rangle$ , получим стабильные состояния:  $|\Phi_0\rangle = |vac\rangle |2, -1, 0\rangle |2, -1, 0\rangle$ ,  $|\Phi_1\rangle = |vac\rangle |2, -1, 0\rangle | -1, 2, 0\rangle$ ,  $|\Phi_2\rangle = |vac\rangle |2, -1, 0\rangle | -1, -1, -1\rangle$ ,  $|\Phi_3\rangle = |vac\rangle | -1, 2, 0\rangle |2, -1, 0\rangle$ ,  $|\Phi_4\rangle = |vac\rangle | -1, 2, 0\rangle | -1, 2, 0\rangle$ ,  $|\Phi_5\rangle = |vac\rangle | -1, 2, 0\rangle | -1, -1, -1\rangle$ ,  $|\Phi_6\rangle = |vac\rangle | -1, -1, -1\rangle |2, -1, 0\rangle$ ,  $|\Phi_7\rangle = |vac\rangle | -1, -1, -1\rangle | -1, 2, 0\rangle$  и  $|\Phi_8\rangle = |vac\rangle | -1, -1, -1\rangle | -1, -1, -1\rangle$  (на рисунке 11).

Исходя от результатов системы одного атома, знаем, что для каждого атома есть три стабильного состояния  $|vac\rangle |2, -1, 0\rangle$ ,  $|vac\rangle | -1, 2, 0\rangle$  и  $|vac\rangle | -1, -1, -1\rangle$ , поэтому для системы двух атомов без транспортного уровня есть  $3 \times 3 = 9$  стабильных состояний по закону комбинаторики.

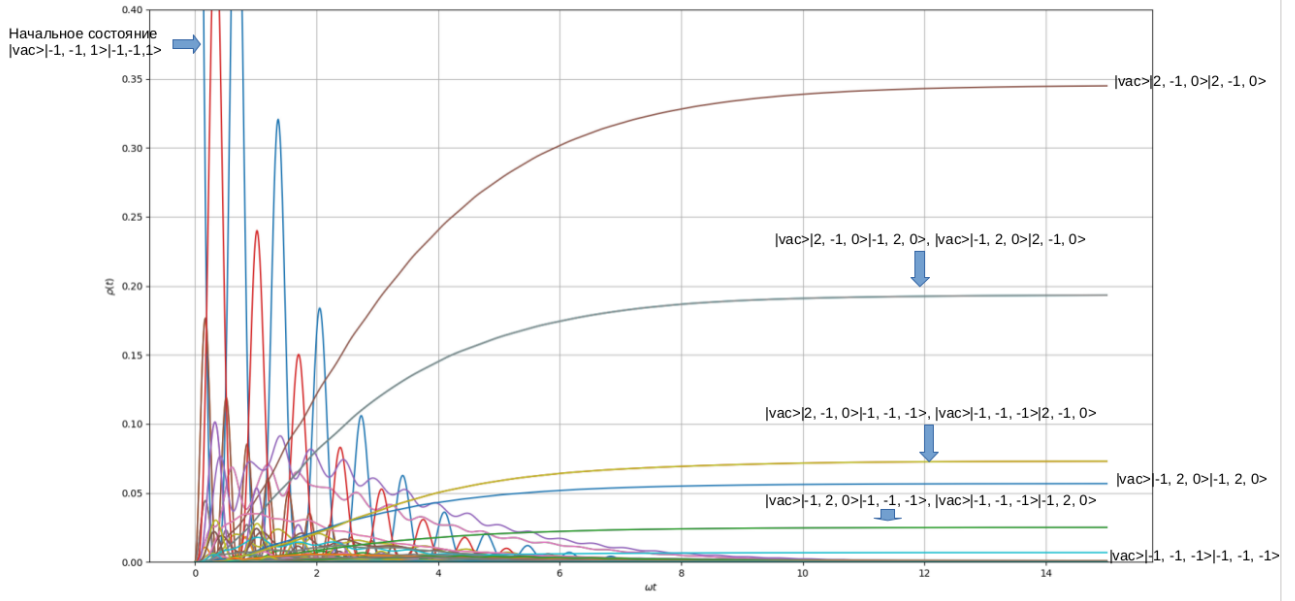


Figure 11: Система двух атомов без транспортного уровня;

Шесть электронами;

Начальное состояние:  $|\text{vac}\rangle|-1, -1, 1\rangle|-1, -1, 1\rangle$ ;

Параметры:

$$g_{\Omega\uparrow} = 4, g_{\Omega\downarrow} = 4, g_{\omega\uparrow} = 2, g_{\omega\downarrow} = 2, g_{\text{tun}\uparrow} = 1, g_{\text{tun}\downarrow} = 1, g_{\text{spin}} = 1;$$

$$\gamma_{\Omega\uparrow} = 1, \gamma_{\Omega\downarrow} = 1, \gamma_{\omega\uparrow} = 1, \gamma_{\omega\downarrow} = 1, \gamma_{\text{spin}} = 1;$$

Стабильные состояния:

$$|\text{vac}\rangle|2, -1, 0\rangle|2, -1, 0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|2, -1, 0\rangle|-1, 2, 0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|-1, 2, 0\rangle|2, -1, 0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|2, -1, 0\rangle|-1, -1, -1\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|-1, -1, -1\rangle|2, -1, 0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|-1, 2, 0\rangle|-1, 2, 0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|-1, 2, 0\rangle|-1, -1, -1\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|-1, -1, -1\rangle|-1, 2, 0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|-1, -1, -1\rangle|-1, -1, -1\rangle.$$

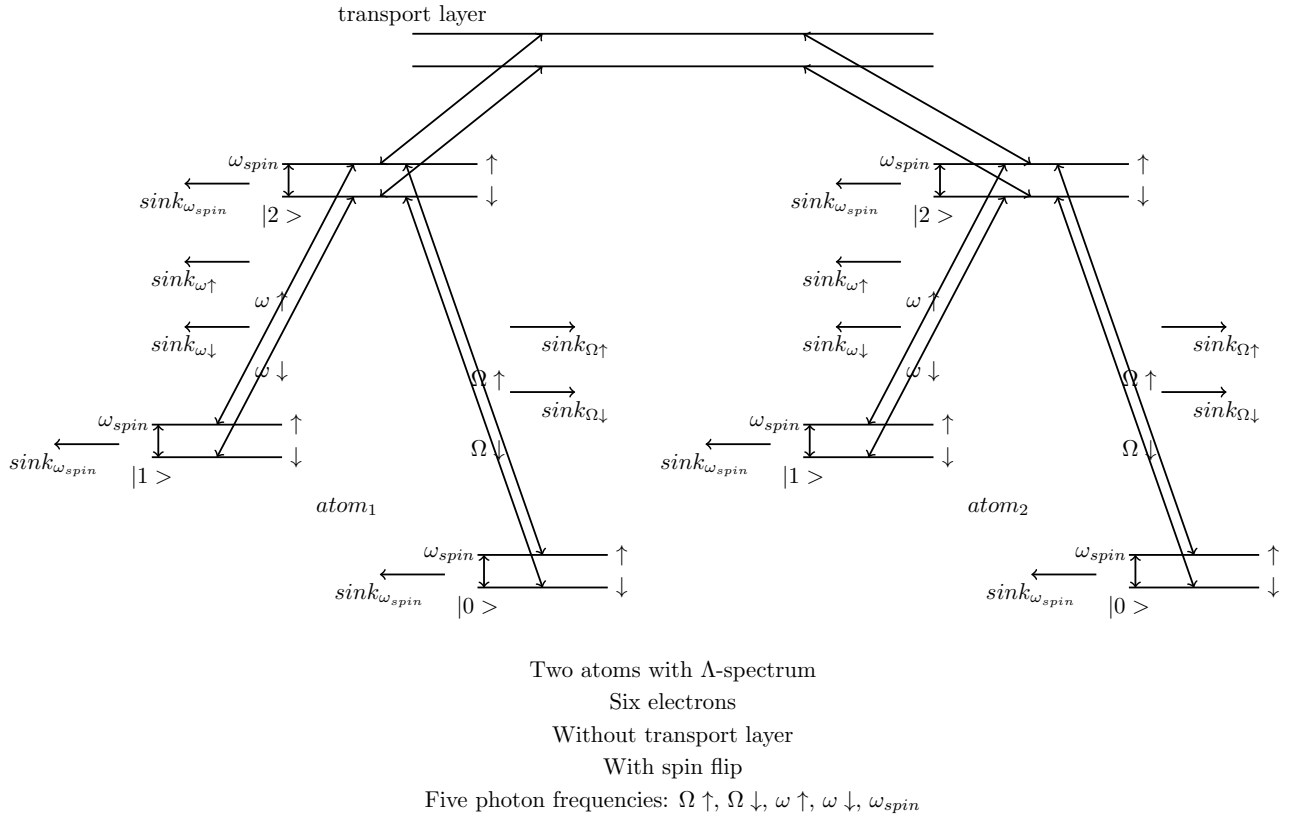


Figure 12: Система двух атомов с транспортным уровнем

Рассмотрим гамильтониан второго варианта:

$$H_{TC}^{RWA} = H_{\Omega\uparrow} + H_{\Omega\downarrow} + H_{\omega\uparrow} + H_{\omega\downarrow} + H_{\omega_{spin}} + H_{int} + H_{tun} \quad (21)$$

$$H_{\Omega\uparrow} = \hbar\Omega \uparrow (a_{\Omega\uparrow}^+ a_{\Omega\uparrow} + \sigma_{\Omega\uparrow,at_1}^+ \sigma_{\Omega\uparrow,at_1} + \sigma_{\Omega\uparrow,at_2}^+ \sigma_{\Omega\uparrow,at_2}) \quad (22)$$

$$H_{\Omega\downarrow} = \hbar\Omega \downarrow (a_{\Omega\downarrow}^+ a_{\Omega\downarrow} + \sigma_{\Omega\downarrow,at_1}^+ \sigma_{\Omega\downarrow,at_1} + \sigma_{\Omega\downarrow,at_2}^+ \sigma_{\Omega\downarrow,at_2}) \quad (23)$$

$$H_{\omega\uparrow} = \hbar\omega \uparrow (a_{\omega\uparrow}^+ a_{\omega\uparrow} + \sigma_{\omega\uparrow,at_1}^+ \sigma_{\omega\uparrow,at_1} + \sigma_{\omega\uparrow,at_2}^+ \sigma_{\omega\uparrow,at_2}) \quad (24)$$

$$H_{\omega\downarrow} = \hbar\omega \downarrow (a_{\omega\downarrow}^+ a_{\omega\downarrow} + \sigma_{\omega\downarrow,at_1}^+ \sigma_{\omega\downarrow,at_1} + \sigma_{\omega\downarrow,at_2}^+ \sigma_{\omega\downarrow,at_2}) \quad (25)$$

$$H_{\omega_{spin}} = \hbar\omega_{spin} (a_{\omega_{spin}}^+ a_{\omega_{spin}} + \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_0}^+ \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_0} + \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_1}^+ \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_1} + \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_2}^+ \sigma_{\omega_{spin},at_1,or_2} + \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_0}^+ \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_0} + \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_1}^+ \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_1} + \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_2}^+ \sigma_{\omega_{spin},at_2,or_2}) \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
H_{int} = & g_{\Omega\uparrow}(a_{\Omega\uparrow}\sigma_{\Omega\uparrow,at1}^+ + a_{\Omega\uparrow}^+\sigma_{\Omega\uparrow,at1} + a_{\Omega\uparrow}\sigma_{\Omega\uparrow,at2}^+ + a_{\Omega\uparrow}^+\sigma_{\Omega\uparrow,at2}) + \\
& g_{\Omega\downarrow}(a_{\Omega\downarrow}\sigma_{\Omega\downarrow,at1}^+ + a_{\Omega\downarrow}^+\sigma_{\Omega\downarrow,at1} + a_{\Omega\downarrow}\sigma_{\Omega\downarrow,at2}^+ + a_{\Omega\downarrow}^+\sigma_{\Omega\downarrow,at2}) + \\
& g_{\omega\uparrow}(a_{\omega\uparrow}\sigma_{\omega\uparrow,at1}^+ + a_{\omega\uparrow}^+\sigma_{\omega\uparrow,at1} + a_{\omega\uparrow}\sigma_{\omega\uparrow,at2}^+ + a_{\omega\uparrow}^+\sigma_{\omega\uparrow,at2}) + \\
& g_{\omega\downarrow}(a_{\omega\downarrow}\sigma_{\omega\downarrow,at1}^+ + a_{\omega\downarrow}^+\sigma_{\omega\downarrow,at1} + a_{\omega\downarrow}\sigma_{\omega\downarrow,at2}^+ + a_{\omega\downarrow}^+\sigma_{\omega\downarrow,at2}) + \\
& g_{\omega_{spin}} \{ a_{\omega_{spin}} (\sigma_{\omega_{spin},at1,or0}^+ + \sigma_{\omega_{spin},at1,or1}^+ + \sigma_{\omega_{spin},at1,or2}^+ + \\
& \sigma_{\omega_{spin},at2,or0}^+ + \sigma_{\omega_{spin},at2,or1}^+ + \sigma_{\omega_{spin},at2,or2}^+) + \\
& a_{\omega_{spin}}^+ (\sigma_{\omega_{spin},at1,or0} + \sigma_{\omega_{spin},at1,or1} + \sigma_{\omega_{spin},at1,or2} + \\
& \sigma_{\omega_{spin},at2,or0} + \sigma_{\omega_{spin},at2,or1} + \sigma_{\omega_{spin},at2,or2}) \}
\end{aligned} \tag{27}$$

$$H_{tun} = g_{tun\uparrow}(\sigma_{\uparrow,at1}^+ \sigma_{\uparrow,at2} + \sigma_{\uparrow,at1} \sigma_{\uparrow,at2}^+) + g_{tun\downarrow}(\sigma_{\downarrow,at1}^+ \sigma_{\downarrow,at2} + \sigma_{\downarrow,at1} \sigma_{\downarrow,at2}^+) \tag{28}$$

Рассмотрим результат:

Пусть начальное состояние  $|\varphi_0\rangle = |vac\rangle | -1, -1, 1\rangle | -1, -1, 1\rangle$ , получим стабильные состояния:  $|\Phi_0\rangle = |vac\rangle |2, -1, 0\rangle |2, -1, 0\rangle$ ,  $|\Phi_1\rangle = |vac\rangle |2, -1, 0\rangle | -1, 2, 0\rangle$ ,  $|\Phi_2\rangle = |vac\rangle | -1, 2, 0\rangle |2, -1, 0\rangle$ ,  $|\Phi_3\rangle = |vac\rangle |2, 2, 0\rangle | -1, -1, 0\rangle$ ,  $|\Phi_4\rangle = |vac\rangle | -1, -1, 0\rangle |2, 2, 0\rangle$ ,  $|\Phi_5\rangle = |vac\rangle | -1, 2, 0\rangle | -1, 2, 0\rangle$ ,  $|\Phi_6\rangle = |vac\rangle | -1, -1, -1\rangle | -1, -1, -1\rangle$  и синглеты:  $|S_0\rangle = |vac\rangle (|2, -1, -1\rangle | -1, -1, 0\rangle - |2, -1, 0\rangle | -1, -1, -1\rangle)$ ,  $|S_1\rangle = |vac\rangle (| -1, -1, 0\rangle |2, -1, -1\rangle - | -1, -1, -1\rangle |2, -1, 0\rangle)$ ,  $|S_2\rangle = |vac\rangle (| -1, 2, -1\rangle | -1, -1, 0\rangle - | -1, 2, 0\rangle | -1, -1, -1\rangle)$  и  $|S_3\rangle = |vac\rangle (| -1, -1, 0\rangle | -1, 2, -1\rangle - | -1, -1, -1\rangle | -1, 2, 0\rangle)$  (на рисунке 13).

Отличая от системы без транспортного уровня,  $|vac\rangle |2, -1, 0\rangle | -1, -1, -1\rangle$ ,  $|vac\rangle | -1, 2, 0\rangle | -1, -1, -1\rangle$ ,  $|vac\rangle | -1, -1, -1\rangle |2, -1, 0\rangle$  и  $|vac\rangle | -1, -1, -1\rangle | -1, 2, 0\rangle$  не могут больше быть стабильным, потому что они переходят возможно на состояния  $|vac\rangle |2, -1, -1\rangle | -1, -1, 0\rangle$ ,  $|vac\rangle | -1, 2, -1\rangle | -1, -1, 0\rangle$ ,  $|vac\rangle | -1, -1, 0\rangle |2, -1, -1\rangle$  и  $|vac\rangle | -1, -1, 0\rangle | -1, 2, -1\rangle$  соответственно из-за транспортного уровня. Но исходя от рисунка, можем получить четыре синглета из этих

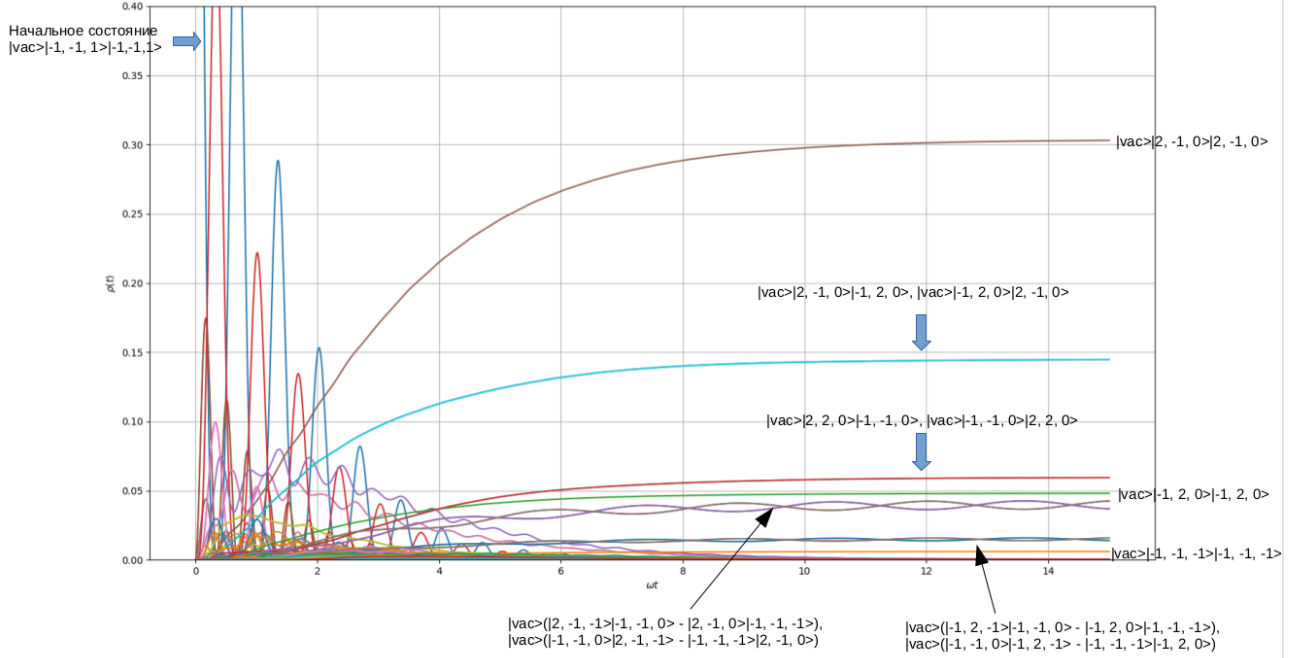


Figure 13: Система двух атомов с транспортным уровнем;

Шесть электронами;

Начальное состояние:  $|\text{vac}\rangle|-1, 1\rangle|-1, 1\rangle$ ;

Параметры:

$$g_{\Omega\uparrow} = 4, g_{\Omega\downarrow} = 4, g_{\omega\uparrow} = 2, g_{\omega\downarrow} = 2, g_{tun\uparrow} = 1, g_{tun\downarrow} = 1, g_{spin} = 1;$$

$$\gamma_{\Omega\uparrow} = 1, \gamma_{\Omega\downarrow} = 1, \gamma_{\omega\uparrow} = 1, \gamma_{\omega\downarrow} = 1, \gamma_{spin} = 1;$$

Стабильные состояния:

$$|\text{vac}\rangle|2, -1, 0\rangle|2, -1, 0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|2, -1, 0\rangle|-1, 2, 0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|-1, 2, 0\rangle|2, -1, 0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|2, 2, 0\rangle|-1, -1, 0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|-1, -1, 0\rangle|2, 2, 0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|-1, 2, 0\rangle|-1, 2, 0\rangle;$$

$$|\text{vac}\rangle|-1, -1, -1\rangle|-1, -1, -1\rangle;$$

Синглеты:

$$|\text{vac}\rangle(|2, -1, -1\rangle|-1, -1, 0\rangle - |2, -1, 0\rangle|-1, -1, -1\rangle);$$

$$|\text{vac}\rangle(|-1, -1, 0\rangle|2, -1, -1\rangle - |-1, -1, -1\rangle|2, -1, 0\rangle);$$

$$|\text{vac}\rangle(|-1, 2, -1\rangle|-1, -1, 0\rangle - |-1, 2, 0\rangle|-1, -1, -1\rangle);$$

$$|\text{vac}\rangle(|-1, -1, 0\rangle|-1, 2, -1\rangle - |-1, -1, -1\rangle|-1, 2, 0\rangle).$$



восьми состояний. Кроме того, получим два нового стабильного состояния:

$$|\Phi_3\rangle = |vac\rangle |2, 2, 0\rangle | -1, -1, 0\rangle, |\Phi_4\rangle = |vac\rangle | -1, -1, 0\rangle |2, 2, 0\rangle.$$

## 4 Ансамблевые осцилляции

### 4.1 Ансамбль атомов

### 4.2 Результаты

## Заключение

В настоящей работе была рассмотрена оптическая интерпретация движения свободной частицы в рамках Джейнса-Каммингса-Хаббарда и была рассмотрена динамика сложных квантовых состояний системы атомов с  $\Lambda$ -спектром и многомодового поля в резонаторе в рамках модели Тависа-Каммингса в RWA приближении.

- Реализация успешно оптической интерпретации движения свободной частицы в рамках модели Джейнса-Каммингса-Хаббарда;
- Получение пространств тёмных состояний для системы одного атома с  $\Lambda$ -спектром в рамках модели Тависа-Каммингса;
- Получение пространств тёмных состояний для системы двух атомов с  $\Lambda$ -спектром в рамках модели Тависа-Каммингса. Влияние транспортного уровня на пространство тёмных состояний о том, что изменять состав в пространстве тёмных состояний: устранять несколько стабильных состояний, добавить несколько других стабильных состояний и несколько синглетов.

На будущее можно продолжить заниматься:

- Исследованием системы трёх и более атомов с  $\Lambda$ -спектром в рамках модели Тависа-Каммингса;
- Исследованием осцилляций ансамбля атомов с  $\Lambda$ -спектром в рамках модели Тависа-Каммингса;
- Исследованием системы атомов с  $\Lambda$ -спектром и полостей в рамках модели Тависа-Каммингса-Хаббарда;

## Список литературы

- [1] Y.I. Ozhigov, N.A. Skovoroda, Conductivity measurements in JCH like models, 2018.
- [2] Y.I. Ozhigov, N.A. Skovoroda, Dark states of atomic ensembles, 2015.
- [3] Y.I. Ozhigov, Space of dark states in Tavis-Cummings model, 2018.
- [4] Афанасьев В. Ю., Викторова Н. Б., Чжэн Кэли, Кулагин А. В., Мяо Хуэйхуэй, Ожигов Ю. И., Ваньшунь Ли, Плужников И., Химический квантовый компьютер. 2021, Научная конференция “Ломоносов чтения - 2021”, Москва, Россия.
- [5] Raffael Düll, Alexei Kulagin, Wanshun Lee, Yuri Ozhigov, Miao Hui-hui, Zheng Keli, Quality of Control in the Tavis-Cummings-Hubbard Model. 2021, <http://arxiv.org/abs/2103.04987>.
- [6] Ожигов Ю.И., А В., Кулагин, Ли Ваньшунь, Чжен Кэли, Мяо Хуэйхуэй, Дюль Раффаель, Управление атомными ансамблями в модели Тависа-Каммингса-Хаббарда. 2020, Научная конференция "Тихоновские чтения - 2020", Москва, Россия.

## Приложение